POLITECNICO DI MILANO

Meccanica dei Fluidi

5. Fluidi Ideali

A cura di: Diego Berzi

v1.3

Indice

1 Teorema di Bernoulli

Abbiamo visto (Cap. 4, Par. 3) che per risolvere il moto dei fluidi abbiamo bisogno di 6 legami costitutivi per gli elementi del tensore degli sforzi. Tali legami costitutivi dipendono dalla particolare sostanza al cui moto siamo interessati.

Per semplicità, consideriamo nel seguito il caso di **Fluido Ideale**, per il quale gli sforzi tangenziali sono nulli. Gli sforzi tangenziali sono nulli se la viscosità è nulla, oppure se il gradiente di velocità nella direzione trasversale al flusso è nullo (Cap. 1, Par. 2.3). Mentre la prima condizione è effettivamente irrealizzabile, la seconda si può verificare per fluidi reali in regioni sufficientemente lontane da pareti solide (come vedremo meglio in seguito). La condizione di fluido ideale, allora, oltre ad essere propedeutica alla successiva analisi dei fluidi reali, ha anche diverse applicazioni pratiche (per esempio in ambito aereonautico). Dal momento che gli sforzi tangenziali sono nulli, il tensore degli sforzi $\overline{\overline{\boldsymbol{\Phi}}}$ per un fluido ideale si riduce a $p\overline{\overline{\mathbf{I}}}$, esattamente come avviene per un fluido qualsiasi in statica (si veda la dimostrazione in Cap. 2, Par. 1.1). La divergenza del tensore degli sforzi che compare nell'equazione indefinita di bilancio della quantità di moto (Cap. 4, Par. 2.1) si riduce, allora, a gradiente di p:

$$\nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\Phi}}} = \frac{\partial \phi_{ji}}{\partial x_j}\hat{\mathbf{i}}_i = \frac{\partial (p\delta_{ji})}{\partial x_j}\hat{\mathbf{i}}_i = \frac{\partial p}{\partial x_i}\hat{\mathbf{i}}_i = \nabla p, \tag{1}$$

con δ_{ji} delta di Kronecker, e l'equazione di bilancio della quantità di moto per fluidi ideali diventa

$$\rho(\overline{\mathbf{f}} - \overline{\mathbf{a}}) = \nabla p. \tag{2}$$

L'Eq.(2) e l'equazione di continuità (Cap. 4, Par. 1.1) costituiscono le **Equazioni di Eulero** [1], che governano la dinamica dei fluidi ideali (detti anche **inviscidi**). Queste 4 equazioni scalari non sono, in realtà, sufficienti a risolvere i problemi di dinamica dei fluidi ideali, dal momento che le incognite del problema sono i 5 campi scalari rappresentati dalle tre componenti scalari del vettore velocità, dalla pressione e dalla densità. L'equazione mancante è costituita, ovviamente, dall'equazione di stato.

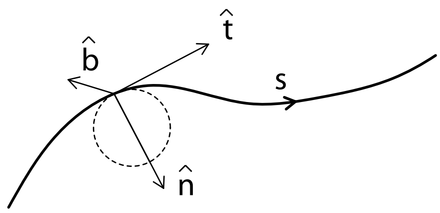

Figura 1: traiettoria e terna di riferimento intrinseca.

Analizziamo ora il moto di una particella di fluido ideale (Ipotesi 1) soggetta al campo gravitazionale ($\overline{\mathbf{f}} = -g\nabla\tilde{z}$, Ipotesi 2). L'Eq.(2) si può scrivere come

$$\rho g \nabla \tilde{z} + \nabla p = -\rho \left(\frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}} + \frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{n}} \right), \tag{3}$$

dove si è scomposta l'accelerazione nelle sue componenti tangenziale e centripeta (Cap. 3, Par. 1.1). Nell'Eq.(3), v è l'unica componente della velocità nella direzione tangente alla traiettoria (per semplicità di notazione abbiamo omesso il pedice s rispetto al Cap. 3, Par. 1.1), indicata dal versore $\hat{\mathbf{t}}$ (Fig. 1), mentre $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale, cioè diretto verso il centro del cerchio osculatore di raggio r. Il versore perpendicolare a $\hat{\mathbf{t}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore binormale $\hat{\mathbf{b}}$ (si osservi che l'accelerazione non ha componente lungo questa direzione). Dividendo l'Eq.(3) per $\gamma = \rho g$, e ipotizzando che il fluido sia incomprimibile (Ipotesi 3), così da poter portare la densità all'interno dell'operatore gradiente, si ottiene, raccogliendo l'operatore nabla,

$$\nabla \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \left(\frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{t}} + \frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{n}} \right). \tag{4}$$

Proiettando l'Eq.(4) lungo la direzione binormale si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial b} \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = 0, \tag{5}$$

cioè che la distribuzione di pressioni lungo la binormale è idrostatica. Proiettando l'Eq.(4) lungo la direzione normale si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{v^2}{gr}. \tag{6}$$

L'Eq.(6) ci dice che, se la traiettoria è curva, la quota piezometrica aumenta verso l'esterno della curva. Nel caso particolare di traiettoria rettilinea, in cui il raggio di curvatura tenda all'infinito, l'Eq.(6) si riduce a

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = 0. \tag{7}$$

Proiettando l'Eq.(4) lungo la direzione tangenziale, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \frac{dv}{dt}. \tag{8}$$

Visto che $v = v(s, t)$, la regola di derivazione Euleriana (Cap. 3, Par. 1.3) applicata all'Eq.(8) fornisce

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \right). \tag{9}$$

Riarrangiando e portando v sotto il segno di derivata,

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{10}$$

Nel caso in cui il moto sia stazionario (Ipotesi 4) si ottiene, finalmente,

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\tilde{z}+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}\right)=\frac{\partial H}{\partial s}=0, \tag{11}$$

dove $H=\tilde{z}+p/\gamma+v^2/(2g)$ è il **Trinomio di Bernoulli** o **Carico Totale**. L'Eq.(11) ci dice che lungo la traiettoria di una particella di fluido ideale, pesante, incomprimibile, in condizioni di moto permanente il carico totale si mantiene costante ($H = cost$). Questo è l'enunciato del **Teorema di Bernoulli** [2] e le Eqs. (1)-(11) ne costituiscono la dimostrazione.

Del teorema di Bernoulli può essere data un'interpretazione energetica. Se moltiplichiamo la quota geodetica $\tilde{z}$ per il peso della particella mg, con m massa della particella, otteniamo l'energia potenziale gravitazionale posseduta dalla particella di fluido. La quota geodetica rappresenta, dunque, l'energia potenziale gravitazionale per unità di peso della particella di fluido. Anche l'altezza piezometrica p/γ può essere vista come una forma di energia per unità di peso della particella di fluido. Dato che la pressione è rappresentativa dello stato in cui si trovano le molecole costituenti il fluido (ad esempio dipende dalla temperatura termodinamica che è indice dell'energia cinetica di traslazione, rotazione e vibrazione delle molecole), la quantità p/γ rappresenta l'energia interna per unità di peso della particella di fluido. La quantità $v^2/(2g)$, detta **Altezza Cinetica**, rappresenta l'energia cinetica per unità di peso della particella di fluido. Il teorema di Bernoulli, allora, esprime, semplicemente, il principio di conservazione dell'**Energia Meccanica** per unità di peso posseduta dalla particella di fluido: la somma di energia potenziale e energia interna può solo trasformarsi in energia cinetica e viceversa. Il fatto che, partendo dal bilancio di quantità di moto, si sia arrivati al principio di conservazione dell'energia è dovuto alla natura conservativa delle forze (sono cioè dotate di potenziale) che compaiono nell'Eq.(2). Vedremo più avanti che, nel caso di fluidi reali, forze non conservative, associate con gli sforzi tangenziali, sono presenti nell'equazione di bilancio di quantità di moto; in quel caso, il principio di conservazione dell'energia meccanica non è valido.

Una dimostrazione più elegante del teorema di Bernoulli si ottiene dall'Eq.(3), se l'accelerazione si scrive come indicato alla fine del Cap. 3, Par. 2.3,

$$\rho g\nabla\tilde{z}+\nabla p=-\rho\left(\frac{\partial\overline{\mathbf{v}}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla v^2+\overline{\mathbf{w}}\times\overline{\mathbf{v}}\right), \tag{12}$$

dove $\overline{\mathbf{w}}$ è la vorticità. Se il moto è stazionario e il fluido incomprimibile, l'Eq.(12) diventa

$$\rho g\nabla\left(\tilde{z}+\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}\right)=-\rho\overline{\mathbf{w}}\times\overline{\mathbf{v}}. \tag{13}$$

Moltiplichiamo ora scalarmente entrambi i membri dell'Eq.(13) per il vettore velocità. Dal momento che il prodotto vettoriale della vorticità per la velocità è un vettore ortogonale alla velocità stessa, il prodotto scalare $\overline{\mathbf{v}} \cdot (\overline{\mathbf{w}} \times \overline{\mathbf{v}})$ è nullo, per cui

$$\overline{\mathbf{v}} \cdot \nabla \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = 0. \tag{14}$$

L'Eq.(13) indica che la componente del gradiente del trinomio di Bernoulli nella direzione della velocità (traiettoria) è nulla: l'energia si conserva.

2 Estensione alle correnti

Dal momento che, nella pratica, si incontrano spesso le correnti, risulta naturale estendere ad esse il teorema di Bernoulli.

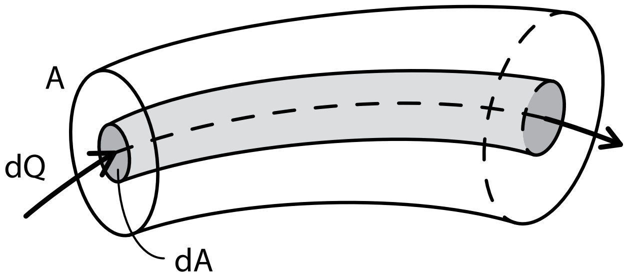

Figura 2: tubo di flusso.

Innanzitutto, definiamo il **Tubo di Flusso** come il volume di spazio occupato da una particella di fluido in moto lungo la sua traiettoria. Consideriamo, dunque, la corrente come costituita da infiniti tubi di flusso, ciascuno dei quali di area trasversale infinitesima dA (Fig. 2). Nel caso di fluido ideale, pesante, incomprimibile e in condizioni di moto permanente, per ogni tubo di flusso vale il teorema di Bernoulli, per cui il carico totale H è costante. Nel caso di fluido incomprimibile, l'equazione di continuità (Cap. 4, Par. 1.3) dice che la portata infinitesima del tubo di flusso $dQ = vdA$ rimane costante. Sempre per l'ipotesi di incomprimibilità, anche il peso specifico γ è costante. Si definisce $dP = \gamma HvdA$ la **Potenza Meccanica** infinitesima del tubo di flusso. Nelle ipotesi in cui vale il teorema di Bernoulli, dunque, dP è costante per ogni tubo di flusso, cioè si conserva. Per estensione, si conserva anche la quantità $P = \int dP$, dove l'integrale si intende calcolato su tutti i tubi di flusso che costituiscono la corrente. Il teorema di Bernoulli esteso alle correnti dice, allora, che la potenza meccanica P di una corrente di fluido ideale, pesante, incomprimibile, in condizioni di moto permanente rimane costante (principio di conservazione della potenza meccanica):

$$P = \int dP = \int_A \gamma HvdA = \gamma \int_A \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) vdA = cost. \qquad (15)$$

Una formulazione diversa del teorema di Bernoulli esteso alle correnti si ottiene nel caso in cui le traiettorie siano quasi rettilinee (**Correnti Lineari** o **Gradualmente Variate**). Il raggio di curvatura di ciascuna delle traiettorie che costituiscono la corrente gradualmente variata tende all'infinito, per cui vale l'Eq.(7). Tale equazione e l'Eq.(5) indicano che la quota piezometrica rimane costante su due direzioni tra di loro perpendicolari. Su tutto il piano individuato da queste due direzioni, dunque, cui appartiene la sezione trasversale A della corrente gradualmente variata, la quota piezometrica si mantiene costante (cioè la distribuzione delle pressioni è idrostatica).

L'Eq.(15) diventa, dunque,

$$P = \gamma \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \frac{\gamma}{2g} \int_A v^3 dA = cost, \tag{16}$$

dove $Q = \int_A v dA$ è la portata della corrente. Il termine $P_c = \gamma \int_A v^3 dA/(2g)$ rappresenta la **Potenza Cinetica** posseduta dalla corrente. Per valutarlo occorre conoscere la distribuzione delle velocità locali v lungo la sezione trasversale al flusso. Nel caso delle correnti, conviene utilizzare la **Velocità Media** V, definita come Q/A o $\int_A v dA/A$. Se la velocità v non è distribuita in maniera uniforme lungo la sezione, $\int_A v^3 dA \neq V^3 A$. Introduciamo, allora, il **Coefficiente di Coriolis** o **di ragguaglio della potenza cinetica**, definito come

$$\alpha = \frac{\int_A v^3 dA}{V^3 A}. \tag{17}$$

Per i fluidi ideali, in realtà, $\alpha = 1$: tutte le particelle che transitano per una certa sezione trasversale avranno iniziato il loro moto a partire da una condizione in cui il contenuto energetico è lo stesso (per esempio, da un serbatoio in cui il fluido è fermo, dove vale la legge di Stevino, per cui la quota piezometrica, cioè l'energia potenziale, è costante). In assenza di perdite energetiche, l'energia iniziale si conserva; in corrispondenza della sezione gradualmente variata, la quota piezometrica è costante, per cui anche l'energia cinetica, e, quindi, la velocità, saranno necessariamente costanti. Per i fluidi reali, invece, la distribuzione di velocità sulla sezione trasversale non è uniforme e $\alpha \neq 1$. In ogni caso, con l'Eq.(17), l'Eq.(16) diventa

$$P = \gamma \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \frac{\gamma}{2g} \alpha V^3 A = cost, \tag{18}$$

e, dividendo tutto per γ e Q (entrambi costanti),

$$H_m = \tilde{z} + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} = cost, \tag{19}$$

dove H_m rappresenta il **Carico Totale Medio** o **Energia Meccanica Media** per unità di peso della corrente. Per una corrente gradualmente variata di fluido ideale, pesante, incomprimibile, in condizioni di moto permanente, dunque, il teorema di Bernoulli torna a essere una variante del principio di conservazione dell'energia meccanica.

Nel caso dei fluidi reali, come già detto, l'energia meccanica non si conserva, ma diminuisce nel senso del moto, trasformandosi in calore. Per correnti gradualmente variate di fluidi reali, incomprimibili, in condizioni di moto permanente, l'Eq.(19) diventa

$$\frac{\partial H_m}{\partial s} = -J, \tag{20}$$

dove J è la **Cadente Energetica Media** della corrente. Determinare un'espressione per la cadente è stato uno dei principali temi di ricerca nell'ambito della Meccanica dei Fluidi fino ai primi decenni del ventesimo secolo. L'approccio più semplice è quello di condurre esperimenti e di identificare la dipendenza della cadente dalle variabili del problema. Prima di illustrare i risultati ottenuti con tale approccio, conviene, però, discutere di come, in generale, vanno condotte le sperimentazioni.

Riferimenti bibliografici

[1] Euler, L., *Principes géneraux du mouvement des fluides*, Mém. Acad. Sci. Berlin, 11, 274-315 (1755).

[2] Bernoulli, D., *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorumcommentarii. Opus academicum ab auctore, dum Petropoli ageret, congestum*, J.R. Dulseckeri (1738).